

99
مواضيع للتمرن
باك
BAC
LMADARISS
السنة الثالثة الثانوية
علوم تجريبية
3
حلول امتحانات
الأكاديميات لسنة 97 - 98
مرتبة وفق مقرر الدورة الأولى
للسنة الدراسية 98 - 99
الدورة الأولى
FRANÇAIS
ANGLAIS
+
الرياضيات
الكيمياء
الطبيعية
شركة النشر والتوزيع المدارس
12 شارع الحسن الثاني — الدار البيضاء

1 النهايـــات

تذكير لبعض المفاهيم الأساسية التي درست في السنة الثانية :

I. العمليات على النهايات

1) نهاية مجموع دالتين :

نهاية f	نهاية g	نهاية f + g
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
$+\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	ℓ	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

2) نهاية جداء دالتين :

نهاية f	نهاية g	نهاية f x g
ℓ	ℓ'	$\ell\,\ell'$
∞	$\ell \neq 0$	∞ (قاعدة الإشارة)
∞	∞	∞ (قاعدة الإشارة)
∞	0	شكل غير محدد

3) نهاية خارج دالتين

نهاية f	نهاية g	نهاية $\frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
∞	ℓ'	∞ (قاعدة الإشارة)
ℓ	∞	0
$\ell \neq 0$	0	∞ (قاعدة الإشارة)
0	0	شكل غير محدد
∞	∞	شكل غير محدد

ملاحظة

- الأشكال الغير المحددة أربعة :

$+\infty-\infty$ $\quad 0\times\infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$

- الشكلان $\frac{\infty}{0}$ و $\frac{0}{\infty}$

ليسا بشكلين غير محددين ! (انظر الجدول الثالث)

II- خاصيتان هامتان :

1) نهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $+\infty$ (أو $-\infty$) هي نهاية حدها الأعلى درجة .

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$$\lim_{|x| \to -\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

(حيث $a_n \neq 0$ و $b_p \neq 0$)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

وهكذا :

اذا كان : $n > p$: $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

إذا كان : $n < p$: $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$

إذا كان : $n = p$; $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$

نهايات دوال مثلثية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

III- نهايات دوال لاجذرية

(انظر الأمثلة) .

تطبيق 1

حدد D مجموعة تعريف الدالة المعرفة ب

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{(x-2)^2}$$

وادرس نهايات f عند محدات D .

الحل

• لدينا : $D = IR - \{2\}$

أو : $D =]-\infty , 2[\cup]2 , +\infty[$

• لدينا :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} -\frac{3}{(x-2)^2} = 0 \end{cases}$$

ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

(لاحظ أننا لم نكتب $-\infty - 0$ وهي كتابة لامعنى لها !)

لدينا : $\lim\limits_{x \to 2} x + 1 = 3$

$-\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ و $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$ تعطينا $\lim\limits_{x \to 2} -\frac{3}{(x-2)^2} = -\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

لاحظ : أننا لم ندرس $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$

كل واحدة على حدى .

لأنه لاداعي لذلك حيث :

$(x-2)^2 > 0$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x-2)^2 = 0$ و $(\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2)^2 = 0$

تطبيق 2

احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4} - 2x$

الحل

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$

وبالتالي لايمكن حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ مباشرة لأنها على الشكل

غير المحدد "$+\infty - \infty$" .

لذا نكتب : $\sqrt{x^2 + 4} - 2x$ على الشكل

$$\sqrt{x^2+4} - 2x = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} - 2x$$

$$= \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2x$$

$$= |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2x$$

وبما أن x يؤول إلى $+\infty$ فإن $x > 0$

وبالتالي $|x| = x$ وهكذا :

$$\sqrt{x^2+4} - 2x = x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2x$$

$$= x \left[\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2 \right]$$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ تعطينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2 = -1$

وبالتالي : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} - 2x = -\infty$

ملاحظة :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} - 2x = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} - \lim_{x \to +\infty} 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\sqrt{1 + \frac{4}{1^2}} - 2 \right] = +\infty \times (-1)$$

كتابات خاطئة يجب اجتنابها !

تطبيق 3

احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sin x - \sin 3x)}$

الحل

* لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة لأننا نحصل على الشكل

غير المحدد " $\frac{0}{0}$ " .

* نكتب :

$$\frac{1 - \cos x}{x(\sin x - \sin 3x)}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)} \times \frac{1}{x}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

(بوضعنا $3x=X$)

فإن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sin x-\sin 3x)}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{1-3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sin x-\sin 3x)}=-\frac{1}{4}$

لاحظ أننا أبرزنا $\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

و $\frac{\sin X}{X}$ لكي نتخلص من الشكل غير المحدد " $\frac{0}{0}$ ")

2 الاتصال

I- اتصال دالة في نقطة x_0 :

تعريف

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0 .

نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

II- التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية ℓ في x_0 . الدّالة g المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{لكل } x\in D_f \\ g(x_0)=\ell \end{cases}$$

هي دالة متصلة في x_0 وتسمى التمديد بالإتصال للدّالة f في x_0 .

III- الاتصال على مجال

- تكون f متصلة على مجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a,b[$.
- تكون f متصلة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b .

IV- خاصيات :

- كل دالة حدودية متصلة على IR .
- كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها
- الدّالتان $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ متصلتان في IR .
- الدّالة $x\to\tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها $D=IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

V- العمليات على الدوال المتصلة

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في x_0 فإن

* $f+g$ و $f\times g$ و λf $(\lambda\in IR)$ دوال متصلة في x_0

* إذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان في x_0

* إذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة في x_0 .

VI- اتصال مركبة دالتين

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث : $f(I)\subset J$

ليكن x_0 عنصرا من I .

* إذا كانت f متصلة في x_0 وكانت g متصلة في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ تكون متصلة في x_0 .

* إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن $g\circ f$ متصلة على I.

- إذا كانت f متصلة في x_0 فإن $|f|$ متصلة في x_0 .

VII- مركبة دالة متصلة ودالة تقبل نهاية

لتكن f دالـة معرفـة على مجال I مفتوح منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$

إذا كانت الدالة f تقبل النهاية ℓ في x_0 وكانت الدالة g متصلة في ℓ فإن الدالة $g\circ f$ تقبل النهاية $g(\ell)$ في x_0 :

$\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=g(\ell)$ حيث $\ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

ملاحظة :

الخاصية السابقة تظل صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ مع تعويض المجال I بمجال مناسب .

VIII- النهايات والاتصال على اليمين واليسار

- الدالة f تقبل نهاية ℓ في x_0 إذا كانت تقبل نفس النهاية ℓ في x_0 على اليمين وعلى اليسار .
- الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة في x_0 على اليمين ومتصلة في x_0 على اليسار

تطبيق 1

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - x & \text{إذا كان } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{إذا كان } x > 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$

الحل

* لدينا : $f(0) = \sqrt{0^2+1} - 0 = 1$

* لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sqrt{x^2+1} - x = 1 = f(0)$

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

* نستنتج مما سبق أن :

الدالة f متصلة على اليسار في $x_0 = 0$ وليست متصلة على اليمين في $x_0 = 0$ وبالتالي فإنها ليست متصلة في $x_0 = 0$.

تطبيق 2

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} & \text{إذا كان } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2} & \text{إذا كان } x \geq 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$

الحل

• نلاحظ أن $D_f = IR$

* لدينا $f(0) = \sqrt{1+0} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

* لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x}$

لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة لأنها على الشكل غير المحدد $\dfrac{0}{0}$.

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1+\sin x} - 1)(\sqrt{1+\sin x} + 1)}{x(\sqrt{1+\sin x} + 1)}$$

$$= \frac{1 + \sin x - 1}{x(\sqrt{1+\sin x} + 1)}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + 1}\right)$$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x} + 1} = \dfrac{1}{2}$

فإن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \dfrac{1}{2}$

* لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \dfrac{1}{2}$

* وبالتالي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

وهذا يعني أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

تطبيق 3

هل يمكن تمديد الدالة

$$f : x \longrightarrow \frac{\sin^2 \pi x}{x - 1}$$

بالاتصال في $x_0 = 1$ ؟

الحل

لنحسب $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin^2 \pi x}{x - 1}$

لايمكن حساب هذه النهاية مباشرة لأنها على الشكل غير المحدد " $\dfrac{0}{0}$ " .

نضع $x - 1 = X$ وبالتالي :

$$\frac{\sin^2 \pi x}{x - 1} = \frac{\sin^2 \pi (1 + X)}{X}$$

$$= \frac{\sin^2 (\pi + \pi X)}{X}$$

$$= \frac{\sin^2 \pi X}{X}$$

$$= \pi \left(\frac{\sin \pi X}{\pi X}\right) x \sin \pi X$$

وبما أن : $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin \pi X}{\pi X} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

فإن :

يمكن تمديد الدالة f بالاتصال في $x_0 = 1$ بتعريف الدالة g المعرفة على IR كمايلي :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & x \neq 1 \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

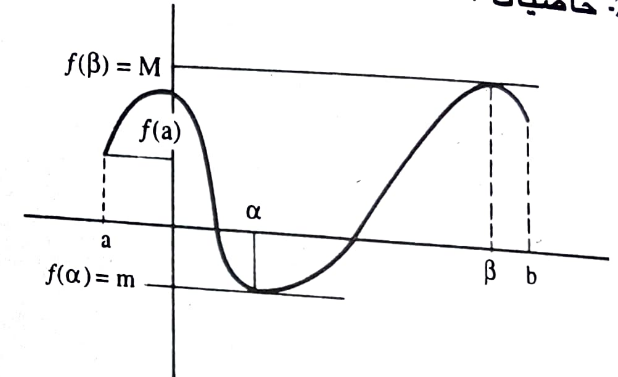
3 الدالة العكسية

1) صورة قطعة بدالة متصلة

1- مبرهنة

صورة قطعة $[a, b]$ بدالة متصلة على $[a, b]$ هي أيضا قطعة $[m, M]$.

2- خاصيات :



* إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ فإنه يوجد عددان حقيقيان α و β من المجال $[a, b]$ بحيث $f(\alpha) = m$ و $f(\beta) = M$

$f(\alpha) = m$ هي القيمة الدنوية للدالة f على $[a, b]$.

$f(\beta) = M$ هي القيمة القصوية للدالة f على $[a, b]$.

* إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ وتزايدية قطعا على $[a, b]$ فإن $f(\alpha) = f(a)$ و $f(\beta) = f(b)$

وأما إذا كانت تناقصية قطعا على $[a, b]$ فإن : $f(\alpha) = f(b)$ و $f(\beta) = f(a)$

2) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على قطعة

أ- * مبرهنة :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على $[a,b]$ فإن :

• f تقابل من $[a, b]$ نحو $f([a, b])$.

وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $f([a, b])$

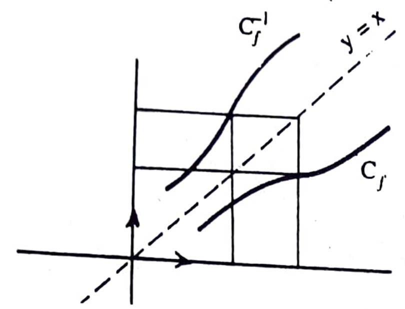
• الدالة f^{-1} متصلة على $f([a, b])$ ولها نفس منحى تغيرات الدالة f

*** نتيجة :**

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f([a, b]) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

ب- * مبرهنة :

التمثيلان المبيانيان في معلم متعامد ممنظم للدالة f ولدالتها العكسية f^{-1} متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم (المستقيم ذي المعادلة $y = x$) .



ج - توسيع المبرهنة السابقة :

ليكن I مجالا من IR محدودا أو غير محدود .

إذا كانت f دالة **متصلة و رتيبة قطعا** على I فإن :

• $f(I)$ مجال من IR و f تقابل من I نحو $f(I)$.

• الدالة العكسية f^{-1} للدالة f متصلة على $f(I)$ ولها نفس منحى التغيرات .

د- تحديد المجال $f(I)$

* إذا كان $I = [a, b[$ و f متصلة وتزايدية قطعا على I

فإن : $f(I) = [f(a) ; \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$

* إذا كان $I = [a, b[$ و f متصلة وتناقصية قطعا على I .

فإن : $f(I) =]\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) ; f(a)]$

• إذا كان $I = [a, +\infty[$ وكانت f متصلة وتزايدية قطعا على I

فإن : $f(I) = [f(a) ; \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

• إذا كان $I = [a, +\infty[$ وكانت f متصلة وتناقصية قطعا على I

فإن : $f(I) =]\lim_{x \to +\infty} f(x) ; f(a)]$

ملاحظة :

إذا كان $I =]a, b[$ أو $I =]a, +\infty[$

أو $I =]-\infty, +\infty[$ أو $I =]-\infty, b[$ أو $I =]-\infty, b]$

فإننا نجد $f(I)$ بنفس الطريقة .

3) تطبيقات

1- دالة قوس الظل

*** نتيجة**

الدالة العددية $x \longrightarrow \tan x$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال: $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

x	$-\pi/2$	$\pi/2$
tan x	$-\infty$ ↗	$+\infty$

*** تعريف :**

الدالة tan تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ نحو IR

ودالتها العكسية تسمى **قوس الظل** ويرمز لها ب : Arctan

$$\text{Arctan} : IR \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[$$

الدالة Arctan **متصلة** على IR وتزايدية قطعا على IR .

x	$-\infty$	$+\infty$
Arctan x	$-\pi/2$ ↗	$\pi/2$

لاحظ : $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$

* **خصائص :**

- $\begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{Arctan}\, x \\ x \in IR \end{cases}$
- $\tan(\text{Arctan}\, x) = x \qquad \forall x \in IR$
- $\text{Arctan}(\tan x) = x \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[$

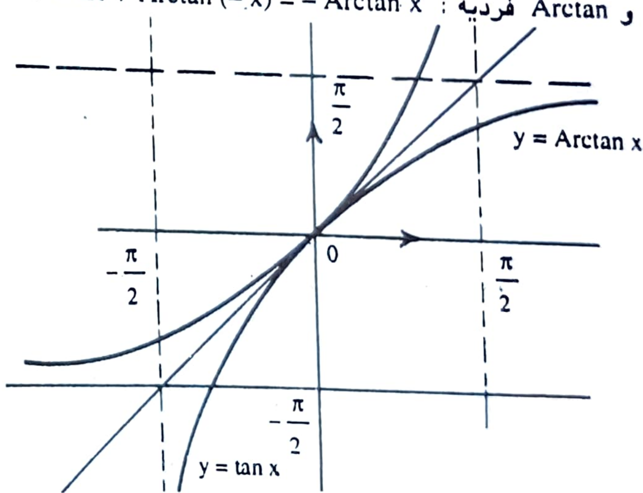
$\forall x \in IR \ \ \forall x' \in IR \qquad \text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, x' \Leftrightarrow x = x'$

$\text{Arctan}\, x > \text{Arctan}\, x' \Leftrightarrow x > x'$

قيم هامة

x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
Arctan x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

و Arctan فردية : $\forall x \in IR : \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}\, x$



2) الدالة $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ $(n \in IN^* \ \ x \in IR^+)$

أ) نتيجة

الدالة $x \longrightarrow x^n$ حيث $x \in IR^+$ و $(n \in IN^*)$

متصلة وتزايدية قطعا على المجال IR^+

x	0	$+\infty$
x^n	0 ↗	$+\infty$

ب) تعريف :

الدالة $x \longrightarrow x^n$ $x \in IR^+$ و $(n \in IN^*)$

تقابل من IR^+ نحو IR^+

ودالتها العكسية هي : $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$

وتسمى **دالة الجذر من الرتبة n**

دالة الجذر من الرتبة n متصلة على IR^+ وتزايدية قطعا على IR^+

x	0	$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0 ↗	$+\infty$

ج) خصائص دالة الجذر من الرتبة n .

- $\begin{cases} x = y^n \\ y \in IR^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \in IR^+ \end{cases}$
- لكل x من IR^+ لدينا :

$\sqrt[n]{x^n} = x$ و $(\sqrt[n]{x})^n = x$

- لكل x و x' من IR^+ لدينا :

$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x'} \Leftrightarrow x = x'$

$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{x'} \Leftrightarrow x > x'$

د) العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن m و n عنصرين من IN^* و a و b عددين من IR^+

لدينا:

* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$
* $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
* $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
* $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
* $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

هـ) اتصال ونهاية مركبة دالة ودالة الجذر من الرتبة n :

* إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على I

فإن الدالة $x \longrightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I أيضا .

* إذا كانت f دالة موجبة وتقبل نهاية ℓ في x_0

فإن الدالة $x \longrightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ تقبل النهاية $\sqrt[n]{\ell}$ في x_0

* إذا كانت f تؤول إلى $+\infty$ فإن الدالة $x \longrightarrow \sqrt[n]{f(x)}$

تؤول إلى $+\infty$.

و) القوة الجذرية لعدد موجب قطعا

* **تعريف**

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا $(a > 0)$

و r عدد جذريا غير منعدم $r \in \mathbb{Q}^*$

العدد a^r هو العدد $\sqrt[q]{a^p}$

حيث : $r = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{Z}^*$ $\quad q \in IN^*$

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات الاس r

* **عمليات على القوى الجذرية :**

ليكن a و b عددين من IR_+^*

و r و r' عددين من $\mathbb{Q}$

لدينا :

$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$

$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$

$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

$a^r b^r = (ab)^r$

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^1 = a$ و $a^0 = 1$

تطبيق 1

لتكن الدالة :

$$f :]-1,0] \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow x+1+\frac{1}{x+1}$$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بين أن f تقابل من $]-1,0]$ نحو مجال J يجب تحديده .

3- اعط جدول تغيرات الدالة f^{-1} .

4- ارسم منحنى f ومنحني f^{-1} في نفس المعلم المتعامد المنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل

1) • $D_f =]-1,0]$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ و $f(0) = 2$

• $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

لكل $-1 < x < 0$: $f'(x) < 0$

و $f'(0) = 0$

x	-1	0
f (x)	$+\infty$ ↘	2

2) **الدالة f تقابل**

* الدالة f متصلة على $]-1,0]$ (لأنها دالة جذرية) .

* الدالة f تناقصية قطعا على $]-1,0]$

إذن f تقابل من $]-1,0]$ نحو المجال $J = f(]-1,0])$

$J = [f(0), \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)[$ (لأن f تناقصية)

أي : $J = [2,+\infty[$

3) جدول تغيرات الدالة f^{-1}

بما أن f تقابل من $]-1,0]$ نحو $[2,+\infty[$

فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} .

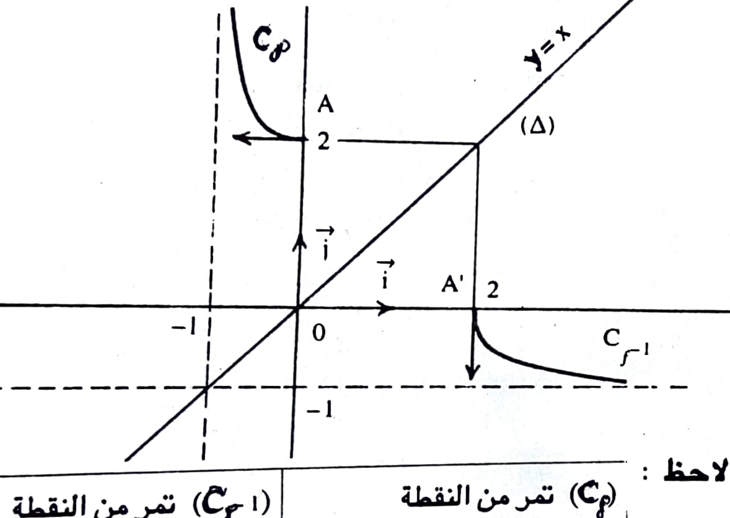
f^{-1} تقابل من $[2,+\infty[$ نحو $]-1,0]$ ، متصلة

و f^{-1} تناقصية قطعا .

x	2	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0 ↘	-1

4) إنشاء (C_f) و $(C_{f^{-1}})$

(C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ (المنصف الأول للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$)



لاحظ :

(C_f) تمر من النقطة A (0 , 2)	$(C_{f^{-1}})$ تمر من النقطة A' (2 , 0)
(C_f) تقبل في A نصف مماس على اليسار موازيا لمحور الأفاصيل	$(C_{f^{-1}})$ تقبل في A' نصف مماس موازيا لمحور الأراتيب .
(C_f) يقبل المستقيم ذي المعادلة $x = -1$ مقاربا .	$(C_{f^{-1}})$ يقبل المستقيم ذي المعادلة $y = -1$ مقاربا .

تطبيق 2

لتكن الدالة :

$$f : [1,+\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow x+4-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$$

1- بين أن f تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده .

2- احسب $f^{-1}(4)$

f^{-1} هي الدالة العكسية للدالة f .

الحل

1) * الدالة f جذرية وبالتالي فإنها متصلة في $]1, +\infty[$.

* ولدينا : $f'(x) = 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$

ولكل $x \in [1, +\infty[$ $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $[1, +\infty[$

إذن : f تقابل من $[1, +\infty[$ نحو المجال $J = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

أي : $J = [0, +\infty[$

2) الدالة f تقابل من $I = [1, +\infty[$ نحو $J = [0, +\infty[$

وبالتالي فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $[0, +\infty[$ وتاخذ قيمها في $[1, +\infty[$.

نريد حساب : $f^{-1}(4)$

ولانتوفر على : $f^{-1}(x)$!!!

(لاتحاول حساب $f^{-1}(x)$!!) نضع $f^{-1}(4) = \alpha$

لدينا : $\begin{cases} f(\alpha) = 4 \\ \alpha \in [1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(4) = \alpha \\ \alpha \in [1, +\infty[\end{cases}$

لنحل إذن المعادلة : $f(\alpha) = 4$: $\alpha \in [1, +\infty[$

$\alpha + 4 - \frac{3}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} = 4$: $\alpha \geq 1 \Leftrightarrow$

$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0$: $\alpha \geq 1 \Leftrightarrow$

إذا وضعنا $P(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 2$ نلاحظ أن : $P(-1) = 0$

وبالتالي : $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 2)$

ومنه : $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2(\alpha - 2)$

$\alpha = -1$ لاتحقق الشرط $\alpha \geq 1$. إذن $\alpha = 2$

أي : $f^{-1}(4) = 2$

4 الاشتقاق

① الدوال القابلة للاشتقاق

1) اشتقاق دالة في نقطة

لتكن f دالة معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0.

نقول إن الدّالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان للدالة $x \longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية ℓ في x_0.

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونرمز له بـ $f'(x_0)$

ونكتب : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ملاحظة : بوضعنا $h = x - x_0$ يكون لدينا :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2) **خاصية**

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0.

3) الإشتقاق على اليمين وعلى اليسار

• لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; x_0 + \alpha[$ $(\alpha > 0)$

تقول إن الدّالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت الدّالة $x \longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ تقبل نهاية ℓ على اليمين في x_0.

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 على اليمين ونرمز له بـ $f'_d(x_0)$ ونكتب

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ملاحظة :

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

• نعرف بالمثل الاشتقاق على اليسار في x_0

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• **خاصية :**

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 وَ $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

② التأويل الهندسي - المماس لمنحنى

1) المماس لمنحنى دالة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 و $(\mathscr{C})$ منحناها في معلم ما.

المستقيم الذي معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

المستقيم المار من $M_0(x_0 ; f(x_0))$ ومعامله الموجه $f'(x_0)$

يسمى مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة $M_0(x_0 ; f(x_0))$

2) نصف مماس لمنحنى دالة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M_0(x_0 ; f(x_0))$ معامله الموجه $f'_d(x_0)$ ومعادلته

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

• نعرف بالمثل نصف المماس على اليسار.

3) نصف مماس مواز لمحور الأراتيب

إذا كانت f متصلة في x_0 وَ

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

فإن f غير قابلة للاشتقاق في x_0 لكن المنحنى يقبل في نقطة $M_0(x_0,f(x_0))$ نصف مماس موازي لمحور الأراتيب.

مثلا :

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

③ الدالة المشتقة وعمليات على الدوال المشتقة

1) تعريف

نقول إن دالة f قابلة للاشتفاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I.

الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$: $x \longrightarrow f'(x)$

تسمى الدالة المشتقة للدالة f على I ويرمز لها ب f'

2) العمليات على الدوال المشتقة

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ $\quad g(x_0) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ $\quad g(x_0) \neq 0$

3) مشتقات الدوال الاعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$	مجموعة تعريف f'
λ (ثابتة)	0	IR
x	1	IR
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	IR^*
x^n $n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$	$n x^{n-1}$	IR $n > 1$ IR^* $n < 1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	IR^{*+}
$\sin x$	$\cos x$	IR
$\cos x$	$-\sin x$	IR
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$[u(x)]^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$	$n[u(x)]^{n-1} u'(x)$	D_u

4) المشتقات المتتالية

تعريف

* إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال]a,b[وكانت f' هي نفسها قابلة للاشتقاق على]a,b[فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وتكتب f'' أو $\frac{d^2f}{dx^2}$ أو $f^{(2)}$

* بصفة عامة نعرف بالترجع الدوال المشتقة المتتالية لدالة f إذا كانت هذه المشتقات موجودة

$f'' = (f')'$ $\quad f''' = (f'')'$

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ ....

الدالة $f^{(n)}$ تسمى الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f على المجال]a,b[.

④ مشتقة دالة مركبة

مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$

- إذا كان x_0 عنصراً من I بحيث f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن gof قابلة للاشتقاق في x_0 ولدينا :

$(gof)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة gof قابلة للاشتقاق على I ولدينا

لكل $x \in I$: $(gof)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$

⑤ مشتقة الدالة العكسية

1) مبرهنة

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على المجال [a,b].

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على]a,b[وكانت دالتها المشتقة لاتنعدم فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $]f(a);f(b)[$ (أو $]f(b);f(a)[$) ولدينا :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

2) مبرهنة

دالة الجذر من الرتبة n حيث $f(x) = \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومشتقتها هي :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

3) مبرهنة

لتكن f و g دالتين بحيث تكون $g > 0$ و $f(x) = [g(x)]^{\frac{1}{n}}$

اي $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

إذا كانت g قابلة للاشتقاق فإن f قابلة للاشتقاق ولدينا :

$$[\sqrt[n]{g(x)}]' = \frac{1}{n}[g(x)]^{\frac{1}{n}-1}\, g'(x)$$

4) مبرهنة

• إذا كان r ينتمي إلى $\mathbb{Q}$ فإن الدالة $x \to x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

• لدينا : $$([f(x)]^r)' = r\,[f(x)]^{r-1}\, f'(x)$$

5) مشتقة الدالة قوس الظل

• الدالة قوس الظل قابلة للاشتقاق على IR ولدينا :

لكل $x \in IR$ $$(\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

• **مبرهنة** :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
فإن الدالة Arctan ou قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$[\text{Arctan}\, u(x)]' = \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

تطبيق 1

لتكن الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.
واعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصلة.

الحل

* قابلية اشتقاق f في $x_0 = 2$ يساراً

إذا كان $x \le 2$ $(x \in D_f)$ لدينا $|x-2| = -x+2$

ومنه $$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{-x} = -x+2+\frac{3}{x}$$

لدينا $$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{-x+2+\frac{3}{x}-\frac{3}{2}}{x-2}$$
$$= \frac{-2x^2+x+6}{2x\,(x-2)}$$
$$= \frac{(x-2)\,(-2x-3)}{2x\,(x-2)}$$

ومنه $$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{-2x-3}{2x} = -\frac{7}{4}$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق يساراً في النقطة $x_0 = 2$ ولدينا

$$f'_g(2) = -\frac{7}{4}$$

* قابلية اشتقاق f في $x_0 = 2$ يمينا

إذا كان $x \ge 2$ $(x \in D_f)$ لدينا $|x-2| = x-2$

ومنه $$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-4}$$

لدينا $$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\frac{x^2-2x-3}{x-4}-\frac{3}{2}}{x-2}$$
$$= \frac{2x^2-4x-6-3x+12}{2(x-4)\,(x-2)}$$
$$= \frac{2x^2-7x+6}{2(x-4)\,(x-2)}$$
$$= \frac{(x-2)\,(2x-3)}{2(x-4)\,(x-2)}$$

و $$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{2x-3}{2\,(x-4)} = -\frac{1}{4}$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق يمينا في النقطة $x_0 = 2$ ولدينا

$$f'_d(2) = -\frac{1}{4}$$

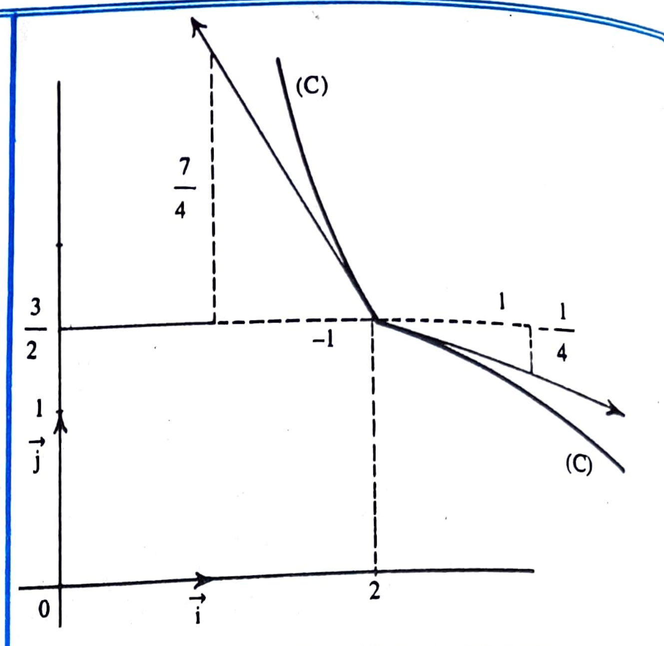
* **خلاصة** :

بما أن $f'_g(2) \ne f'_d(2)$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 2$

التأويل الهندسي

يقبل المنحنى (C) للدالة f في النقطة $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ نصفي مماس :

- أحدهما على اليسار المعامل الموجه لحامله هو
$$f'_g(2) = -\frac{7}{4}$$
- الآخر على اليمين المعامل الموجه لحامله هو
$$f'_d(2) = -\frac{1}{4}$$



تطبيق 2

لتكن f الدّالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2}$$

ادرس قابلية اشتقاق على اليسار في $-\sqrt{2}$

اعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

الحل

يجب دراسة $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} \frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}}$

لدينا :

$$\frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$\frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x + \sqrt{2}}$$

بما أن $\begin{pmatrix} x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ فإن $x + \sqrt{2} < 0$

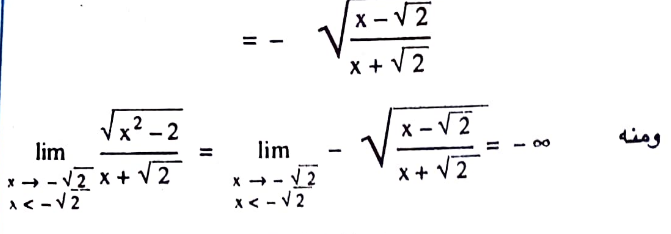
وبالتالي : $\sqrt{(x + \sqrt{2})^2} = |x + \sqrt{2}| = -(x + \sqrt{2})$

ومنه :

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{-(x + \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{(x + \sqrt{2})^2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x - \sqrt{2})^2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}}$$



$$= -\sqrt{\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x + \sqrt{2}} = \lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} -\sqrt{\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}} = -\infty$

وهكذا

$$\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} \frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = -\infty$$

الدّالة f ليست قابلة للاشتقاق يساراً في $-\sqrt{2}$.

المنحنى (C) للدّالة f يقبل في النقطة $A(-\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$ نصف مماس موازٍ لمحور الأراتيب وموجه نحو الأراتيب الموجبة.

5 دراسة الدوال العددية

① رتابة دالة وإشارة الدالة المشتقة

1) مبرهنة

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$.

- إذا كان لدينا $f'(x) > 0$ لكل x من $]a,b[$ فإن f تكون تزايدية قطعا على المجال $[a,b]$.
- إذا كان لدينا $f'(x) < 0$ لكل x من $]a,b[$ فإن f تكون تناقصية قطعا على المجال $[a,b]$.

2) مبرهنة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ وليكن c عنصراً من $]a,b[$.

* إذا كان $f'(x) > 0$ لكل x من $]a,c[$
و $f'(x) < 0$ لكل x من $]c,b[$
فإن الدالة f تكون لها قيمة قصوية نسبية في c
* إذا كان $f'(x) < 0$ لكل x من $]a,c[$
و $f'(x) > 0$ لكل x من $]c,b[$
فإن الدّالة f تكون لها قيمة دنوية نسبية في c

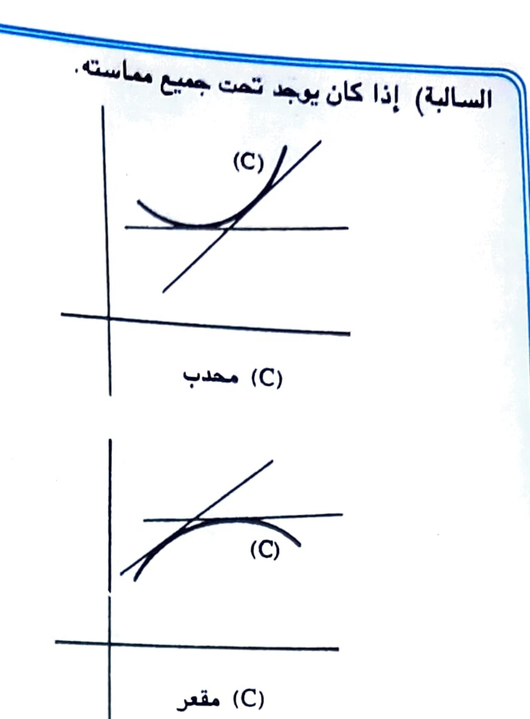
② التحدب والتقعر - نقط انعطاف

1) تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و (C) المنحنى الممثل لها.

* نقول إن المنحنى (C) محدب (أو تقعر (C) موجه نحو الأراتيب الموجبة) إذا كان يوجد فوق جميع مماساته.
* نقول إن المنحنى (C) مقعر (أو تقعر (C) موجه نحو الأراتيب

السالبة) إذا كان يوجد تحت جميع مماسته.

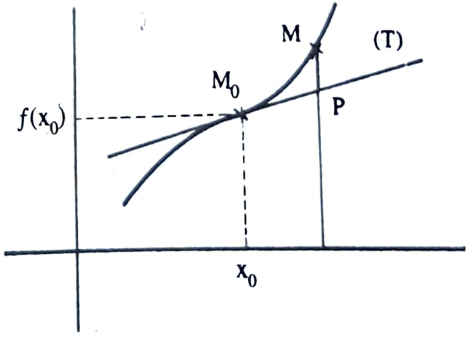


2)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و (C) المنحنى الممثل للدالة f و T مماسا للمنحنى (C) في نقطة $M_0(x_0, f(x_0))$.

ولتكن M و P نقطتين لهما نفس الأفصول وتنتميان إلى (C) و (T) على التوالي.

إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0 وتغيرت إشارته في مجال مركزه x_0 فإن النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة انعطاف للمنحنى

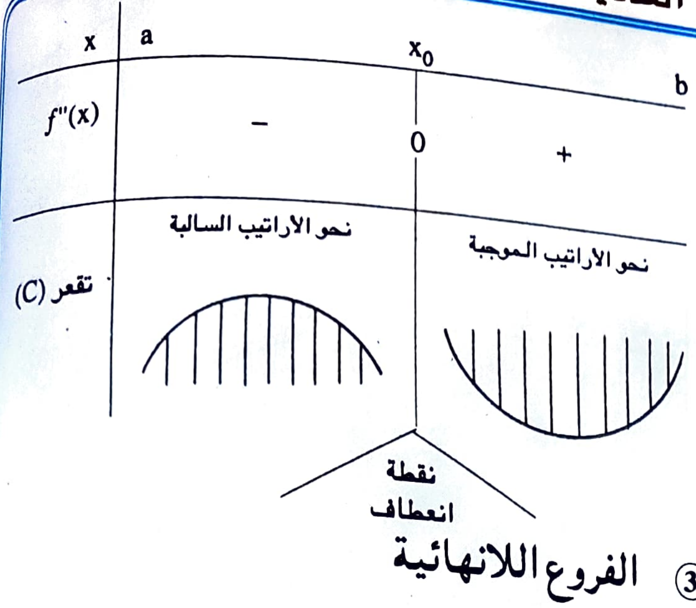


M_0 نقطة انعطاف لـ (C) ((T) يخترق (C) في M_0)

3) خاصية

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C) المنحنى الممثل للدالة f.

- إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن (C) يكون محدبا على I.
- إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن (C) يكون مقعرا على I.
- إذا انعدمت f'' في نقطة x_0 من I وتغيرت إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).



③ الفروع اللانهائية

1) تعريف

f دالة و (C) المنحنى الممثل لها و $M(x ; f(x))$ نقطة من (C).

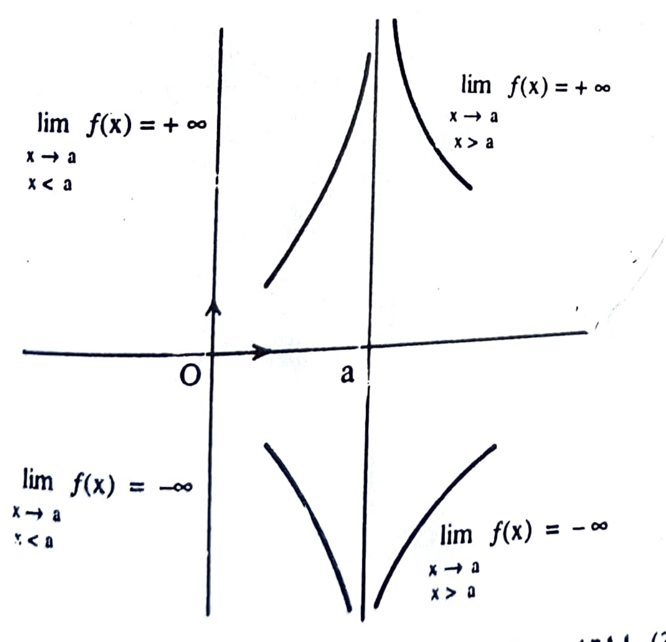
نقول إن (C) يقبل فرعا لانهائيا إذا آلت إحدى إحداثيتي M إلى مالانهاية.

2) المقارب الموازي لمحور الأراتيب

لتكن f دالة و (C) المنحنى الممثل لها و a عنصرا من IR.

إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

فإن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مقارب للمنحنى (C) وهو يوازي محور الأراتيب.

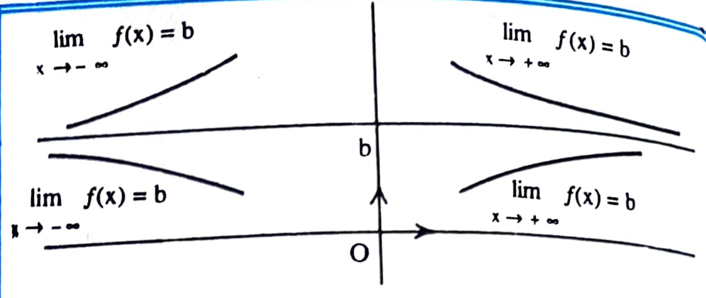


3) المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

لتكن f دالة و (C) المنحنى الممثل لها و b عنصرا من IR .

إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

فإن المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب للمنحنى (C) يوازي محور الأفاصيل.



4) المقارب المائل

1) تعريف

إذا كانت $(a \in IR^* \quad b \in IR)$ و $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

فإن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار ∞

2) خاصية

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) إذا وفقط إذا

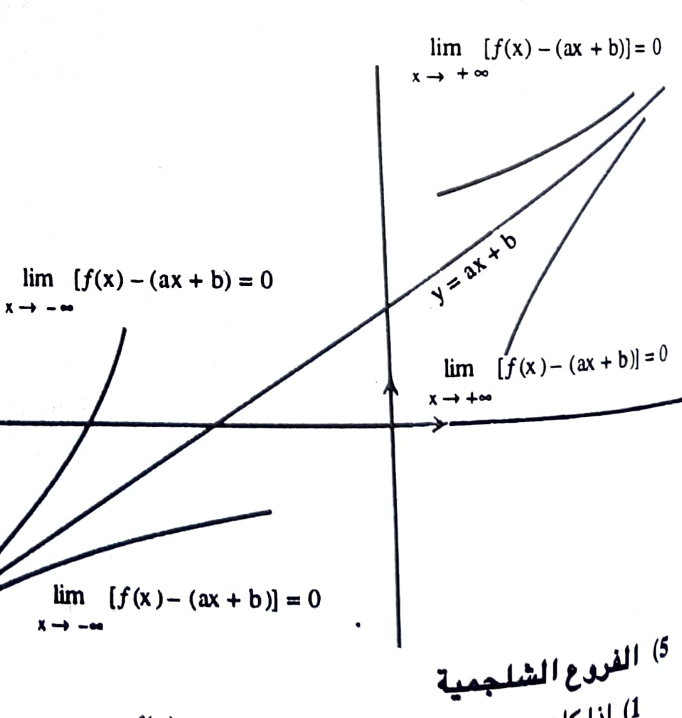
- كانت توجد دالة h بحيث يكون

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$$

أو

- كان $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in IR^*)$

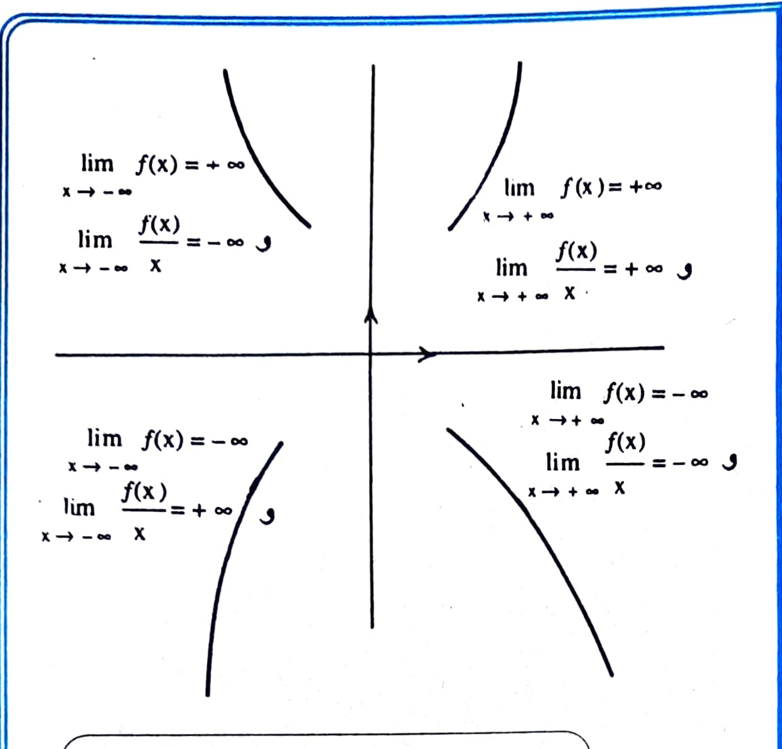
و $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$



5) الفروع الشلجمية

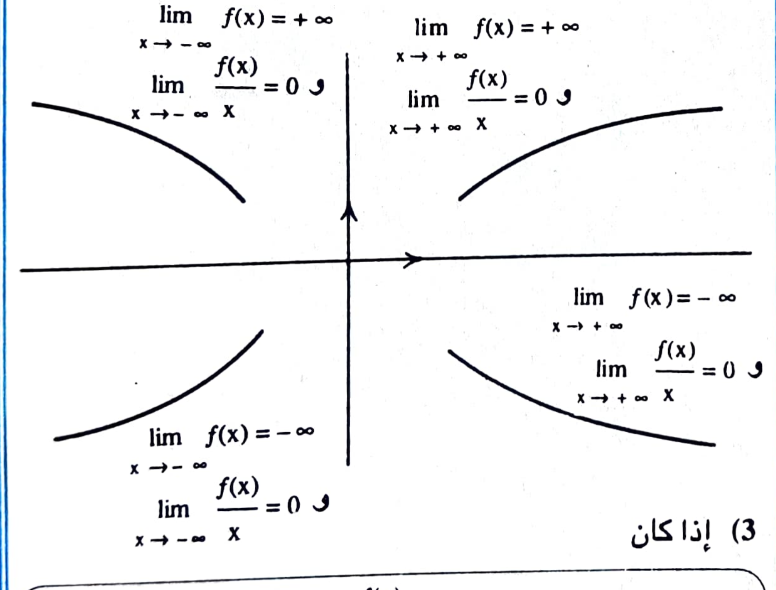
1) إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

فإن (C) يقبل بجوار ∞ فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب



2) إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

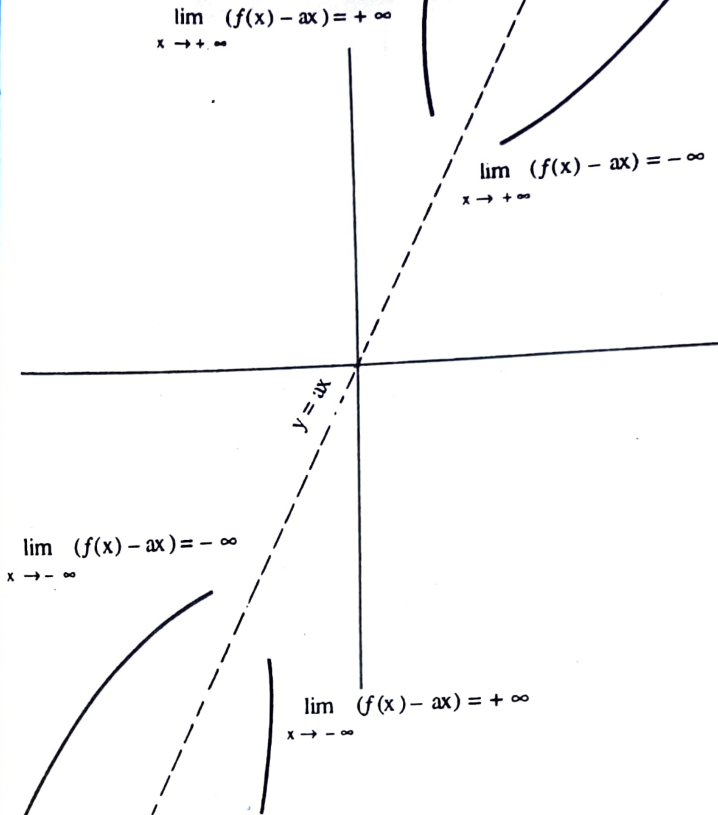
فإن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار ∞.



3) إذا كان

$$(a \neq 0) \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$$

فإن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$ بجوار ∞

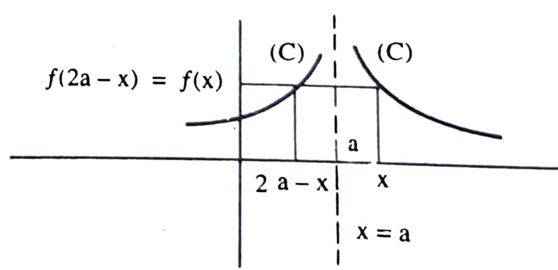


4 محور تماثل ومركز تماثل

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D و (C) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ممنظم

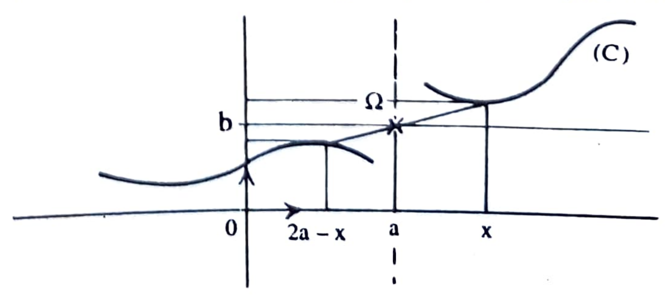
1) يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ **محور تماثل** للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in D) : \quad 2a - x \in D \quad و \quad f(2a - x) = f(x)$$



2) تكون النقطة $\Omega(a;b)$ **مركز تماثل** للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall x \in D) : \quad 2a - x \in D \quad و \quad f(2a - x) = -f(x) + 2b$$



5 الدّالة الدورية

1) تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث يكون لكل عنصر x من D

$$\forall x \in D \quad x - T \in D \; ; \; x + T \in D \quad و \quad f(x + T) = f(x)$$

العدد الحقيقي T يسمى دورا للدّالة f.

اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدّالة f.

2) خاصيات

1) إذا كانت f دالة معرفة على مجموعة D وكان T دورا لها فإن

$$\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad f(x + nT) = f(x)$$

2) إذا كان T دورا لدالة f فإنه لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ لدينا nT أيضا دور للدّالة f.

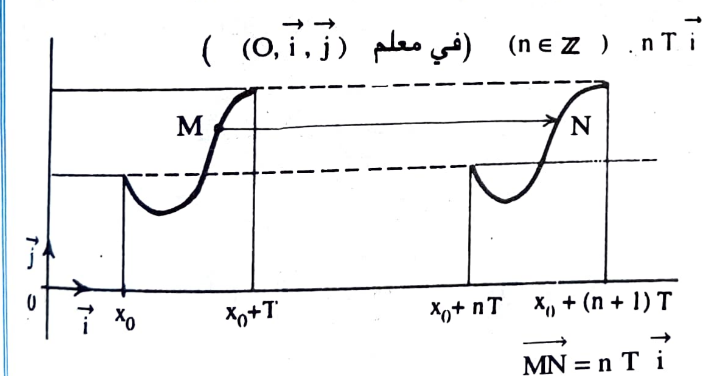
3) لتكن f دالة دورية دورها T ومعرفة على D وليكن I_0 مجالا ضمن $D \cap [x ; x + T]$ و I_n ضمن $D \cap [(x + nT ; x + (n + 1) T]$

- إذا كانت f **ثابتة** على I_0 فإنها تكون ثابتة على I_n.
- إذا كانت f **تزايدية** (أو **تناقصية**) على I_0 فإنها تكون أيضا تزايدية (أو تناقصية) على I_n

3) التمثيل المبياني لدالّة دورية

إذا كانت f دالة دورية دورها T ومعرفة على مجموعة D فإن منحنى f على $D \cap [x_0 + nT ; x_0 + (n + 1) T]$

هو **صورة** منحنى f على $D \cap [x_0 ; x_0 + T]$ **بالإزاحة** ذات المتجهة $nT\vec{i}$ ($n \in \mathbb{Z}$) (في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$)



$$\overrightarrow{MN} = nT\vec{i}$$

6 تصميم دراسة دالة

لدراسة وتمثيل دالة f غالبا ما نتبع التصميم التالي :

*

1) تحديد مجموعة التعريف D للدّالة f. ثم تحديد مجموعة الدراسة E التي ستدرس فيها الدالة f إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية.

2) تحديد النهايات عند محدات مجموعة التعريف أو الدراسة

3) دراسة الاتصال وقابلية الاشتقاق.

4) دراسة منحى تغيرات الدّالة f على E باستعمال الدالة المشتقة وإشارتها (إذا كان ذلك ضروريا).
5) وضع جدول تغيرات الدّالة على E.
* وإذا أردنا أن نرسم منحنى الدّالة f ، ندرس :
6) الفروع اللانهائية على E
7) دراسة تقعر المنحنى وتحديد نقط الانعطاف (إذا كان ذلك ضروريا وممكنا !)
8) تحديد بعض نقط المنحنى
9) رسم المنحنى على D مع ذكر بعض الخاصيات :
- التماثلات.
- مماسات أو أنصاف مماسات في نقط خاصة.

تطبيق 1

لتكن الدّالة العددية المعرفة على $D = [0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

و(C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ لكل $x \in D - \{0\}$
2) ادرس تقعر(C) وبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف.

الحل

1) حساب $f'(x)$ لكل $x \in D - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1-x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}}$$

حساب $f''(x)$ لكل $x \in D - \{0\}$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\;\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}-2)\,2(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^4}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}\;\frac{(\sqrt{x}-1)[\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4]}{(\sqrt{x}-1)^4}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}}$$

2) تقعر (C) ونقطة انعطاف (C)

ندرس إشارة $f''(x)$

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

x	0		1		9		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
تقعر (C) موجه نحو الأراتيب	‖	السالبة	‖	الموجبة		السالبة	

النقطة $A\left(9\,;\frac{9}{2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)

تطبيق 2

ادرس تقعر المنحنى (C) الممثل للدّالة

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \text{Arctan}\sqrt{x-1}$$

الحل

• مجموعة تعريف الدّالة f هو $D = [1\,;+\infty[$

• لكل $x \in D - \{1\}$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1+(\sqrt{x-1})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x-1}}$$

أي :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2x}}$$

• لكل $x \in D - \{1\}$ ، لدينا :

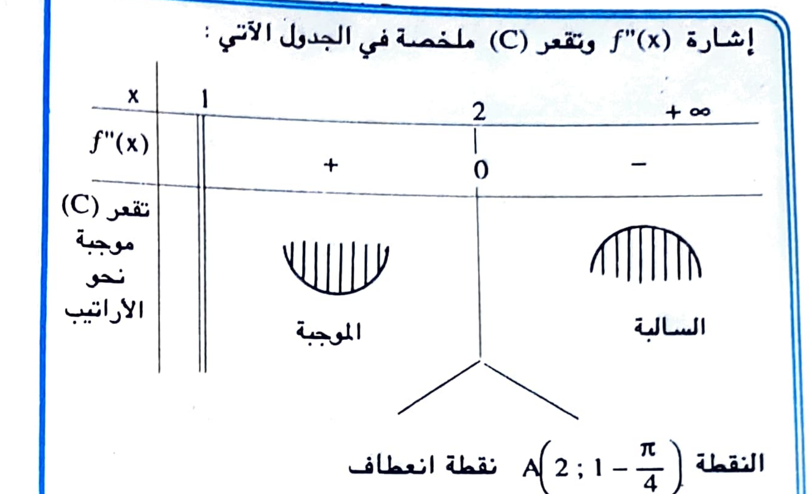
$$f''(x) = \frac{1}{2}\;\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot x-\sqrt{x-1}}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x-2(x-1)}{4x^2\sqrt{x-1}}$$

أي :

$$\boxed{f''(x) = \frac{2-x}{4x^2\sqrt{x-1}}}$$

إشارة $f''(x)$ وتقعر (C) ملخصة في الجدول الآتي :



النقطة $A\left(2\,;\,1-\frac{\pi}{4}\right)$ نقطة انعطاف

تطبيق 3

ادرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة
$f(x) = \sqrt{x+1} - x$

الحل

* لدينا $D_f = [-1\,;+\infty[$

* لدينا لكل $x > 0$:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - x = x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - x = x\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right]$$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

* لدينا لكل $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1$$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

* لدينا $f(x) + x = \sqrt{x+1}$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x] = +\infty$

إذن جوار $+\infty$ يقبل (C_f) فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته : $y = -x$

